SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Sergio Polidoro

SPAZI DI SOBOLEV-MORREY PER UN'EQUAZIONE ULTRAPARABOLICA

5 giugno 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Abbiamo considerato spazi di Morrey $L^{p,\lambda}$ opportunamente costruiti per lo studio di equazioni differenziali del tipo seguente

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(x,t)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = f,$$

con $x \in \mathbb{R}^N$ ed $1 \leq m_0 < N$. I nostri principali risultati sono una stima a priori interna del tipo

$$\|\partial_{x_i,x_j}u\|_{L^{p,\lambda}} \leq c\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

per ogni $p \in]1,\infty[$, per $i,j = 1,\dots,m_0$ e per $\lambda \in]0,Q+2[$ ($Q+2$ è la *dimensione omogenea* dello spazio) ed un teorema di immersione per spazi di Sobolev-Morrey, che estendono al nostro contesto i risultati di Campanato e Stampacchia. Come diretta conseguenza dei precedenti risultati si ottengono teoremi di regolarità hölderiana per la funzione u.

Le stime a priori sono state dimostrate supponendo che i coefficienti $a_{i,j}$ appartengano ad una opportuna classe VMO, utilizzando le tecniche introdotte da Di Fazio e Ragusa in [5], per gli operatori ellittici in forma di non divergenza.

Abstract. We consider the Morrey space $L^{p,\lambda}$ suitably introduced in order to study the following second order differential equation

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(x,t)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = f,$$

where $x \in \mathbb{R}^N$ and $1 \leq m_0 < N$. Our main results are an a priori interior estimate like

$$\|\partial_{x_i,x_j}u\|_{L^{p,\lambda}} \leq c\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

for any $p \in]1,\infty[$, for $i,j = 1,\dots,m_0$ and for $\lambda \in]0,Q+2[$ ($Q+2$ is the *homogeneous dimension* of the space) and an imbedding theorem for Sobolev-Morrey spaces, which extends to our setting the results by Campanato and Stampacchia. As a direct consequence of the above results it follows the Hölder continuity of u.

We prove the a priori estimates under a suitable VMO assumption on the coefficients $a_{i,j}$, by using the technique introduced by Di Fazio and Ragusa in [5], for the elliptic operators in non-divergence form.

1 Introduzione

I risultati di questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con la dottoressa Maria Alessandra Ragusa, dell'Università di Catania.

Abbiamo considerato spazi di Sobolev-Morrey relativi ad operatori del tipo seguente

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(z)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u \tag{1.1}$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}, 0 < m_0 \leq N$, verificanti la seguente

IPOTESI H *La matrice* $A_0(z) = \left(a_{i,j}(z)\right)_{i,j=1,\dots,m_0}$ *è simmetrica ed esiste* $\Lambda > 0$ *tale che*

$$\Lambda^{-1}|\xi|^2 \leq \langle A_0(z)\xi,\xi\rangle \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ *e per ogni* $\xi \in \mathbb{R}^{m_0}$.

La matrice $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots,N}$ *assume la forma*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & B_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dove ogni B_j *è un blocco* $m_{j-1} \times m_j$ *di rango* m_j, *per* $j = 1,2,\dots,r$, *con* $m_0 \geq m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$ *ed* $m_0 + m_1 + \dots + m_r = N$.

Supporremo anche che i coefficienti $a_{i,j}$ siano misurabili ed appartengano ad un opportuno spazio di funzioni a variazione media infinitesima che sarà denotato con VMO_L e verrà definito precisamente nel terzo paragrafo.

Abbiamo studiato il problema della regolarità locale delle *soluzioni forti* dell'equazione differenziale $Lu = f$. Diremo che u è *soluzione forte* di $Lu = f$ nell'aperto Ω di $\mathbb{R}^{N+1}$ se esiste una costante $q > 1$ tale che u e le sue derivate $\partial_{x_i}u, \partial_{x_i,x_j}u$ ed $\sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u$ sono elementi di $L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e l'equazione differenziale $Lu(z) = f(z)$ è verificata in tutti i punti di Ω, tranne al più quelli di un insieme di misura nulla. Nel seguito useremo la seguente notazione

$$Yu = \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u.$$

L'articolo [10], in collaborazione con Lanconelli, è il primo lavoro di uno studio sistematico degli operatori (1.1) e riguarda il caso in cui i coefficienti $a_{i,j}$ di L sono costanti. Tra i risultati di [10] ricordiamo che operatori di questo tipo sono invarianti rispetto alle seguenti strutture di gruppo.

DEFINIZIONE 1.1 *Per ogni* $(x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *poniamo*

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t+\tau), \quad E(t) = \exp(-tB^T)$$

e

$$D(\lambda) = \operatorname{diag}\big(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}\big),$$

dove I_{m_j} *è la matrice identità* $m_j \times m_j$. *Diremo che* $\big(\mathbb{R}^{N+1}, \circ\big)$ *è il "gruppo di traslazioni associato ad* L*" e che* $\big(D(\lambda), \lambda^2\big)_{\lambda>0}$ *è il "gruppo di dilatazioni associato ad* L*". Nel seguito chiameremo "dimensione omogenea" di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *il numero naturale* $Q+2$, *dove*

$$Q = m_0 + 3m_1 + \ldots + (2r+1)m_r.$$

Osserviamo che lo zero del gruppo di traslazioni $\big(\mathbb{R}^{N+1}, \circ\big)$ è $(0,0)$ e che $(x,t)^{-1} = (-E(-t)x, -t)$.

Nei successivi miei lavori [14], [15], [16] e nel lavoro di Manfredini [12] sono stati studiati gli operatori (1.1), verificanti l'Ipotesi H, sotto una opportuna condizione di regolarità hölderiana sui coefficienti $a_{i,j}$, definita in termini della seguente quasidistanza.

DEFINIZIONE 1.2 *Siano* $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ *gli interi positivi tali che*

$$D(\lambda) = \operatorname{diag}\big(\lambda^{\alpha_1}, \dots, \lambda^{\alpha_N}\big).$$

Poniamo $\|z\| = 0$ *per* $z = 0$ *mentre, se* $z \in \mathbb{R}^{N+1} \setminus \{0\}$, *definiamo* $\|z\| = \varrho$, *ove* ϱ *è l'unica soluzione positiva dell'equazione*

$$\frac{x_1^2}{\varrho^{2\alpha_1}} + \frac{x_2^2}{\varrho^{2\alpha_2}} + \cdots + \frac{x_N^2}{\varrho^{2\alpha_N}} + \frac{t^2}{\varrho^4} = 1.$$

Associamo a questa norma la seguente "quasidistanza" $d(z,w) = \|w^{-1} \circ z\|$ *ed indichiamo con* $\mathcal{B}_r(z)$ *la d-sfera di centro* z *e raggio* r.

Osserviamo che una semplice verifica mostra che l'applicazione $z \mapsto \|z\|$ gode delle seguenti proprietà

$$\|z^{-1}\| \le c_1 \|z\| \quad \text{per ogni} \quad z \in \mathbb{R}^{N+1} \tag{1.2}$$

e

$$\|z \circ \zeta\| \le c_2(\|z\| + \|\zeta\|) \quad \text{per ogni} \quad z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{1.3}$$

dove le costanti c_1 e c_2 dipendono solo dalla matrice B.

Inoltre la misura di Lebesgue è invariante rispetto alle strutture di gruppo sopra introdotte, in quanto $\det E(t) = e^{t\,\mathrm{tr}B} = 1$. Notiamo anche che, essendo $\det D(\lambda) = \lambda^Q$, risulta

$$\operatorname{mis}(\mathcal{B}_r(0)) = r^{Q+2} \operatorname{mis}(\mathcal{B}_1(0)),$$

dove $\text{mis}(\mathcal{B}_1(0)) = \omega_{N+1}$ è la misura della sfera unitaria *euclidea* di $\mathbb{R}^{N+1}$.

L'ipotesi di regolarità formulata sui coefficienti $a_{i,j}$ in [14], [15], [16] e [12] è la loro B-hölderianità uniforme, ossia la richiesta che esistano due costanti positive α, M, con $\alpha \leq 1$, tali che $|a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)| \leq M\|\zeta^{-1} \circ z\|^{\alpha}$. Sotto questa ipotesi, in [14], [15] e [16] si dimostra l'esistenza di una soluzione fondamentale per l'operatore L, con precise stime locali e globali, risultati di unicità per il problema di Cauchy; in [12] vengono provate stime di Schauder e risultati di esistenza per il problema di Dirichlet.

Per quanto riguarda la regolarità delle soluzioni di equazioni differenziali con coefficienti discontinui ricordiamo il lavoro [4] di Chiarenza, Frasca e Longo. In [4] si dimostra che se $f \in L^p_{\text{loc}}$, con $1 < p < \infty$, ed i coefficienti $a_{i,j}$ sono funzioni di classe VMO, allora la soluzione u dell'equazione $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\partial_{x_i,x_j} u = f$ appartiene a $W^{2,p}_{\text{loc}}$.

I risultati di Chiarenza, Frasca e Longo sono stati successivamente estesi da Di Fazio e Ragusa agli spazi di Morrey, in [5] e in [6], ancora nel contesto delle equazioni differenziali ellittiche. Dai risultati di [5] e [6] e da quelli provati da Campanato in [3] e da Stampacchia in [18] seguono immediatamente teoremi di regolarità hölderiana per le soluzioni e per le loro derivate prime.

Le stesse tecniche introdotte in [4] sono state utilizzatre da Bramanti, Cerutti e Manfredini in [1] per gli operatori L definiti in (1.1), soddisfacenti l'Ipotesi H. Nel lavoro [1] viene definito lo spazio di funzioni VMO_L, opportunamente modellato sulle strutture di gruppo della Definizione 1.1. Quindi, nell'ipotesi che i coefficienti $a_{i,j}$ siano in tale spazio, vengono dimostrate stime a priori in L^p per le derivate $\partial_{x_i,x_j} u$ $(i,j = 1, ..., m_0)$ e Yu in termini della norma di Lu.

Lo scopo del presente lavoro è quello di estendere i risultati di Di Fazio e Ragusa [6] agli operatori (1.1). A tal fine è naturale definire i seguenti spazi di Morrey e di Sobolev-Morrey, che verranno indicati con $L^{p,\lambda}(L,\Omega)$ ed $S^{p,\lambda}(L,\Omega)$ (rispettivamente) per sottolineare la loro dipendenza dall'operatore L.

DEFINIZIONE 1.3 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $p \in]1,\infty[$ e $\lambda \in [0, Q+2]$. Definiamo*

$$L^{p,\lambda}(L,\Omega) = \{f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) : \|f\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} < \infty\},$$

dove

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} = \left(\sup_{r>0, z\in\Omega} \frac{1}{r^{\lambda}} \int_{\Omega\cap\mathcal{B}_r(z)} |f(w)|^p dw \right)^{\frac{1}{p}}.$$

DEFINIZIONE 1.4 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $p \in]1,\infty[$ e $\lambda \in [0, Q+2]$. Indichiamo con $S^{p,\lambda}(L,\Omega)$ l'insieme delle funzioni $f \in L^{p,\lambda}(L,\Omega)$ che hanno le derivate deboli*

$\partial_{x_j} f, \partial_{x_j x_k} f$ *ed* $Yf \in L^{p,\lambda}(L,\Omega)$, *per* $j,k = 1,\dots,m_0$. *La norma in questo spazio è*

$$\|f\|_{S^{p,\lambda}(L,\Omega)} = \Big(\|f\|^p_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} + \sum_{j=1}^{m_0} \|\partial_{x_j} f\|^p_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} + \sum_{j,k=1}^{m_0} \|\partial_{x_j x_k} f\|^p_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} + \|Yf\|^p_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Vogliamo sottolineare il fatto che per ottenere la regolarità hölderiana delle soluzioni di $Lu = f$ e delle loro derivate prime, è stato necessario estendere i risultati di Campanato e di Stampacchia agli spazi di funzioni sopra definiti. Ricordiamo che spazi di Sobolev-Morrey di questo tipo sono stati considerati da Lu in [11] per lo studio di operatori di tipo Hörmander della forma $L = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$. Tuttavia qui abbiamo utilizzato una tecnica diversa da quella di Campanato, Stampacchia e di Lu, in quanto quest'ultima si basa su una disuguaglianza di tipo Poincaré (si veda il lavoro di Jerison [9] per gli operatori di Hörmander) mentre, essendo i nostri spazi di funzioni anisotropi, nel nostro contesto una disuguaglianza di Poincaré non sembra valere.

Il presente seminario è organizzato come segue.

Nel paragrafo 2 dimostriamo teoremi di immersione per spazi di Sobolev-Morrey.

Nel paragrafo 3 estendiamo agli spazi di Morrey le stime a priori in L^p dimostrate in [1].

Il paragrafo 4 contiene la prova dei seguenti Teoremi (1.5) e (1.6), che sono il principale risultato di questo seminario. Rimandiamo al paragrafo 3 per la precisa definizione di VMO_L.

TEOREMA 1.5 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $\mathbb{R}^{N+1}$ *e sia* u *soluzione forte in* Ω *dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(z)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u = f.$$

Supponiamo che l'operatore L *verifichi l'Ipotesi H, che* $a_{i,j} \in \mathrm{VMO}_L$ *per* $i,j = 1,\dots,m_0$ *e che* $u \in L^p(\Omega), f \in L^{p,\lambda}(B,\Omega)$, *con* $p \in]1,\infty[$ *e* $\lambda \in]0, Q+2[$. *Allora, per ogni* $i,j = 1,\dots,m_0$ *risulta* $\partial_{x_i x_j} u \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(B,\Omega), Yu \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(B,\Omega)$ *e per ogni aperto* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *esiste una costante positiva* c_1, *che dipende solo da* $p, \lambda, \Omega, \Omega'$ *e dall'operatore* L, *tale che*

$$\begin{aligned} \|\partial_{x_i x_j} u; L^{p,\lambda}(B,\Omega')\| &\le c_1 \|f; L^{p,\lambda}(B,\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\|, \\ \|Yu; L^{p,\lambda}(B,\Omega')\| &\le c_1 \|f; L^{p,\lambda}(B,\Omega)\| + \|u; L^p(\Omega)\|, \end{aligned} \tag{1.4}$$

per $i,j = 1,\dots,m_0$.

TEOREMA 1.6 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia u soluzione forte in Ω dell'equazione*

$$\sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(z)\partial_{x_i,x_j}u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j}x_i\partial_{x_j}u - \partial_t u = f.$$

Supponiamo che l'operatore L verifichi l'Ipotesi H, che $a_{i,j} \in \mathrm{VMO}_L$ per $i,j = 1,\dots,m_0$ e che $u \in L^p(\Omega), f \in L^{p,\lambda}(B,\Omega)$, con $p \in]1,\infty[$ e $\lambda \in]0,Q+2[$.

Allora, se $2p+\lambda > Q+2$, poniamo $\alpha = \min\left\{1, \frac{2p+\lambda-(Q+2)}{p}\right\}$ e si ha che per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ esiste una costante positiva c_2, che dipende solo da p,λ,Ω,Ω' e dall'operatore L, tale che

$$\frac{|u(z)-u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{\alpha}} \le c_2\left(\|f;L^{p,\lambda}(B,\Omega)\| + \|u;L^{p,\lambda}(\Omega)\|\right),$$

per ogni $z,\zeta \in \Omega', z \neq \zeta$.

Inoltre, se $p+\lambda > Q+2$, poniamo $\beta = \frac{p+\lambda-(Q+2)}{p}$ e si ha che per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ esiste una costante positiva c_3, che dipende solo da p,λ,Ω,Ω' e dall'operatore L, tale che

$$\frac{|\partial_{x_j}u(z)-\partial_{x_j}u(\zeta)|}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{\beta}} \le c_3\left(\|f;L^{p,\lambda}(B,\Omega)\| + \|u;L^{p,\lambda}(\Omega)\|\right),$$

per ogni $z,\zeta \in \Omega', z \neq \zeta$ e $j = 1,\dots,m_0$.

2 Teoremi di immersione per spazi di Sobolev-Morrey

In questo paragrafo dimostriamo teoremi di immersione per gli spazi di Sobolev-Morrey. Nel seguito indicheremo con $C^{\alpha}(L,\Omega)$ lo spazio delle funzioni B-hölderiane di esponente α su Ω.

TEOREMA 2.1 *Sia $u \in S^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, con $p \in]1,\infty[$ e $\lambda \in [0,Q+2[$.*

1) *Se $\lambda+2p < Q+2$, allora $u \in L^{q,\mu}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{2}{Q+2}$ e $\mu = \frac{\lambda(Q+2)}{Q+2-2p}$;*

2) *se $\lambda+2p > Q+2$ e $p+\lambda < Q+2$, allora $u \in C^{\gamma}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, con $\gamma = \frac{2p+\lambda-(Q+2)}{p}$;*

3) *se $\lambda+p < Q+2$, allora $\partial_{x_j}u \in L^{r,\nu}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{Q+2}, \nu = \frac{\lambda(Q+2)}{Q+2-p}$ e $j = 1,\dots,m_0$;*

4) *se $\lambda+p > Q+2$, allora $\partial_{x_j}u \in C^{\delta}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, con $\delta = \frac{p+\lambda-(Q+2)}{p}$ e $j = 1,\dots,m_0$.*

Inoltre le inclusioni tra spazi sopra indicate sono immersioni continue.

OSSERVAZIONE 2.2 Se $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ allora $L^{p,\lambda}(L,\Omega)$ è immerso con continuità in ogni $L^{p',\lambda'}(L,\Omega)$, con $p' \leq p$ e $\lambda' \leq \frac{p'}{p}\lambda + (Q+2)\left(1-\frac{p'}{p}\right)$.

Enunciamo ora un'immediata conseguenza del Teorema 2.1, che useremo in seguito.

COROLLARIO 2.3 *Sia $u \in S^{p,\mu}(L,\Omega)$. Se $\mu + 2p < Q+2$, allora $u \in L^{p,\mu+2p}(L,\Omega)$; se $\mu + p < Q+2$ allora $\partial_{x_j} u \in L^{p,\mu+p}(L,\Omega)$, per $j = 1,\dots,m_0$.*

Al fine di provare il Teorema 2.1 dobbiamo richiamare alcuni risultati e dimostrare alcuni lemmi. Consideriamo innanzitutto alcune proprietà dell'operatore "congelato"

$$L_\zeta = \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}(\zeta)\partial_{x_i,x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u. \tag{2.1}$$

Per prima cosa osserviamo che L_ζ appartiene alla classe studiata in [10] e quindi, quando è verificata l'Ipotesi H, esso è ipoellittico per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed è invariante rispetto alle strutture di gruppo della Definizione 1.1. Sottolineamo il fatto che i gruppi dipendono solo dalla matrice B, ma non dal punto ζ. Indicheremo con $A(z)$ la matrice $N \times N$ che ha i coefficienti $a_{i,j}(z)$ dell'operatore L nelle posizioni corrispondenti ad $i,j = 1,\dots,m_0$ e 0 nelle rimanenti posizioni. Vale allora il seguente risultato (cfr. [10]).

PROPOSIZIONE 2.4 *Per ogni fissato $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$ e per ogni $t > 0$ la matrice*

$$C(\zeta,t) = \int_0^t E(s)A(\zeta)E^T(s)ds$$

risulta definita positiva; la soluzione fondamentale di L_ζ, con polo in zero, è

$$\Gamma(\zeta;x,t) = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}(\det C(\zeta,t))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(\zeta,t)x,x\rangle\right) \tag{2.2}$$

per $t > 0, \Gamma(\zeta;x,t) = 0$ per $t \leq 0$.

La soluzione fondamentale di L_ζ con polo in (ξ,τ) è la traslata a sinistra di $\Gamma(\zeta;\cdot)$ rispetto al gruppo $(\mathbb{R}^{N+1},\circ)$:

$$\Gamma(\zeta;(\xi,\tau)^{-1} \circ (x,t)). \tag{2.3}$$

In seguito utilizzeremo le seguenti notazioni: $\Gamma_i = \partial_{x_i}\Gamma$ e $\Gamma_{ij} = \partial_{x_i x_j}\Gamma$, per $i,j = 1,\dots,m_0$. Osserviano esplicitamente che Γ è omogenea di grado $-Q$ rispetto al gruppo $\left(D(\lambda),\lambda^2\right)_{\lambda>0}$, nelle variabili (x,t) e che, per $i,j = 1,...,m_0$, Γ_i e Γ_{ij} sono omogenee di grado $-(Q+1)$ e $-(Q+2)$, rispettivamente.

Riportiamo infine un teorema di valor medio per le funzioni omogenee, dimostrato in [13], Lemma 5.1 (vedi anche [7], Teorema 1.15) ed un Teorema sulle convoluzioni con nuclei omogenei, la cui prova si può trovare in [19], Remark 8.21 del Capitolo I.

TEOREMA 2.5 *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $K \in C^1(\mathbb{R}^{N+1}\backslash\{0\})$ una funzione omogenea di grado α rispetto al gruppo $\left(D(\lambda),\lambda^2\right)_{\lambda>0}$. Allora esistono due costanti $c > 0$ e $M > 1$ tali che se $\|z\| \geq M\,\|z^{-1}\circ\zeta\|$:*

$$|K(\zeta) - K(z)| \leq c\|z^{-1}\circ\zeta\| \cdot \|z\|^{\alpha-1}.$$

TEOREMA 2.6 *Per ogni $\alpha \in]0, Q+2[$, $p > 1$, la funzione $g \in L^p(\mathbb{R}^{N+1})$*

$$T_\alpha g(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \frac{g(\zeta)}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2-\alpha}} d\zeta,$$

risulta definita quasi dappertutto, ed esiste $c = c(p,\alpha) > 0$ tale che

$$\|Tg\|_q \leq c\|g\|_p,$$

ove q verifica la relazione $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q+2}$.

Dimostriamo ora alcuni risultati preliminari.

OSSERVAZIONE 2.7 Osserviamo innanzitutto che $S^{p,0}(L,\mathbb{R}^{N+1}) = S^p(L,\mathbb{R}^{N+1})$ (lo spazio di Sobolev delle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ tali che $\partial_{x_j} f, \partial_{x_j,x_k} f$ ed Yf sono in $L^p(\Omega)$ per $j,k = 1,\dots,m_0$). Inoltre C_0^∞ è denso in $S^p(L,\mathbb{R}^{N+1})$, per ogni $p \in [1,\infty[$. Infatti, se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ ed $\int\varphi = 1$, possiamo definire un mollificatore ponendo per ogni $u \in S^p(L,\mathbb{R}^{N+1})$

$$u_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{Q+2}} \int \varphi\left(D(\varepsilon^{-1})(z\circ\zeta^{-1})\right) u(\zeta) d\zeta. \tag{2.4}$$

Risulta $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, $u_\varepsilon \to u$ in L^p, per $\varepsilon \to 0$ e

$$\partial_{x_i}(u_\varepsilon) = (\partial_{x_i} u)_\varepsilon, \quad \partial_{x_i,x_j}(u_\varepsilon) = \left(\partial_{x_i,x_j} u\right)_\varepsilon, \quad Y(u_\varepsilon) = (Yu)_\varepsilon,$$

per $i,j = 1,\dots,m_0$, come si verifica con un conto diretto. Di conseguenza $u_\varepsilon \to u$ in $S^p(L,\mathbb{R}^{N+1})$, per $\varepsilon \to 0$. Da questo risultato, con semplici considerazioni, si ottiene anche la densità di $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$.

LEMMA 2.8 *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}, \alpha \in]0, Q+2[, p \in]1, \infty[$ e $\lambda \geq 0$ tali che $\lambda + \alpha p < Q+2$. Allora, per ogni $g \in L^{p,\lambda}(L, \Omega)$, risulta definita quasi dappertutto la funzione*

$$T_\alpha g(z) = \int_\Omega \frac{g(\zeta)}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2-\alpha}} d\zeta,$$

$T_\alpha g$ appartiene allo spazio $L^{q,\mu}(L, \Omega)$, con $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{Q+2}$, $\mu = \frac{\lambda(Q+2)}{Q+2-\alpha p} \left(= \lambda \frac{q}{p}\right)$ ed esiste $c = c(p, \lambda, \alpha) > 0$ tale che

$$\|T_\alpha g\|_{L^{q,\mu}(L,\Omega)} \leq c \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)}.$$

DIMOSTRAZIONE Sia g un'assegnata funzione di $L^{p,\lambda}(L, \Omega)$, $\bar{z} \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $R > 0$ siano fissati. Per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^{N+1}$, indichiamo con χ_E la sua funzione caratteristica. Definiamo allora

$$g_0 = g \chi_{\mathcal{B}_R(\bar{z})}, \qquad g_k = g \chi_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z}) \setminus \mathcal{B}_{2^{k-1} R}(\bar{z})}, \text{ per } k \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

e poniamo $\delta = 1/(2c_1^2 c_2)$, dove c_1 e c_2 sono le constanti che compaiono nelle formule (1.2) e (1.3). Per il Teorema 2.6 si ha

$$\|T_\alpha g_0\|_{L^q(\Omega \cap B_{\delta R})} \leq \|T_\alpha g_0\|_{L^q(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c \|g\|_{L^p(\Omega \cap B_R)} \leq c R^{\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)}. \tag{2.6}$$

Consideriamo ora $g_k(z)$, dove $k \in \mathbb{N}$ e $z \in \Omega \cap \mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})$. Per prima cosa osserviamo che, se $\zeta \in \mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z}) \setminus \mathcal{B}_{2^{k-1} R}(\bar{z})$, si ha

$$\frac{2^{k-1} R}{c_1} \leq \|\zeta^{-1} \circ \bar{z}\| \leq c_2 \left(\|\zeta^{-1} \circ z\| + \|z^{-1} \circ \bar{z}\| \right) \leq c_2 \left(\|\zeta^{-1} \circ z\| + c_1 \delta R \right),$$

quindi

$$\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \frac{2^{k-1} R}{c_1 c_2} - c_1 \delta R \geq \frac{1}{4 c_1 c_2} 2^k R. \tag{2.7}$$

Di conseguenza

$$|T_\alpha g_k(z)| \leq \frac{(4 c_1 c_2)^{Q+2-\alpha}}{(2^k R)^{Q+2-\alpha}} \int_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z}) \cap \Omega} |g(\zeta)| d\zeta \leq c' \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} (2^k R)^{\frac{\lambda - (Q+2)}{p} + \alpha},$$

e, integrando,

$$\|T_\alpha g_k\|_{L^q(L, \Omega \cap B_{\delta R})} \leq c'' \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} R^{\frac{\lambda}{p}} (2^k)^{\frac{\lambda - (Q+2)}{p} + \alpha},$$

ove c'' è una costante positiva che dipende solo da p, dalla dimensione dello spazio N e dalle costanti c_1 e c_2. Da questa disuguaglianza e dalla (2.6) otteniamo

$$\frac{1}{(\delta R)^{\frac{\lambda}{p}}} \|T_\alpha g\|_{L^q(\Omega \cap B_{\delta R})} \leq \delta^{-\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \left(c + c'' \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{p\alpha + \lambda - (Q+2)}{p}} \right)^k \right).$$

Questo conclude la prova del Lemma, in quanto la serie al secondo membro è convergente ed inoltre $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$.

LEMMA 2.9 *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$, $p \in]1,\infty[$ e $\lambda \in [0, Q+2]$. Fissati $w \in \Omega, \alpha \in [0, Q+2[, \beta \in]0, Q+2[$ e $\sigma > 0$ definiamo per ogni $g \in L^{p,\lambda}(L,\Omega)$*

$$T'_\alpha g(z) = \int_{\{\zeta \in \Omega : \|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \sigma \|w^{-1} \circ z\|\}} \frac{g(\zeta)}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2-\alpha}} d\zeta$$

e

$$T''_\beta g(z) = \int_{\{\zeta \in \Omega : \|\zeta^{-1} \circ z\| < \sigma \|w^{-1} \circ z\|\}} \frac{g(\zeta)}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2-\beta}} d\zeta.$$

Allora, se $\lambda + p\alpha < Q+2$, esiste $c = c(p, \lambda, \alpha, \sigma) > 0$ tale che

$$|T'_\alpha g(z)| \leq c' \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \|w^{-1} \circ z\|^{\frac{p\alpha+\lambda-(Q+2)}{p}}.$$

Inoltre, se $\lambda + p\beta > Q+2$, esiste $c = c(p, \lambda, \beta, \sigma) > 0$ tale che

$$|T''_\beta g(z)| \leq c'' \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \|w^{-1} \circ z\|^{\frac{p\beta+\lambda-(Q+2)}{p}}.$$

DIMOSTRAZIONE La prima affermazione segue immediatamente dalla seguente disuguaglianza:

$$|T'_\alpha g(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{\zeta \in \Omega : 2^{k-1}\sigma \|w^{-1} \circ z\| \leq \|\zeta^{-1} \circ z\| < 2^k \sigma \|w^{-1} \circ z\|\}} \frac{|g(\zeta)|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2-\alpha}} d\zeta \leq$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2^k \sigma \|w^{-1} \circ z\|} \right)^{Q+2-\alpha} \int_{\Omega \cap B_{2^k c_1 \sigma \|w^{-1} \circ z\|}(z)} |g(\zeta)| d\zeta \leq$$
$$c' \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \|w^{-1} \circ z\|^{\frac{p\alpha+\lambda-(Q+2)}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{p\alpha+\lambda-(Q+2)}{p}} \right)^k.$$

La seconda si ottiene analogamente, integrando sugli insiemi

$$\{\zeta \in \Omega : 2^{-k}\sigma \|w^{-1} \circ z\| \leq \|\zeta^{-1} \circ z\| < 2^{1-k}\sigma \|w^{-1} \circ z\|\}.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.1 Sia Γ la soluzione fondamentale dell'operatore

$$L_0 = \sum_{j=1}^{m_0} \partial^2_{x_j} + Y.$$

Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, allora

$$u(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) Lu(\zeta) d\zeta, \qquad \partial_{x_j} u(z) = -\int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma_j(\zeta^{-1} \circ z) Lu(\zeta) d\zeta, \tag{2.8}$$

per ogni $z \in \Omega$ e $j = 1, \dots, m_0$. Se invece $u \in S^{p,\lambda}(L, \mathbb{R}^{N+1})$, allora $u \in S^p(L, \mathbb{R}^{N+1})$, ed essendo le funzioni Γ e Γ_j omogenee di grado $-Q$ e $-(Q+1)$ rispettivamente, un ragionamento di densità ed il Teorema 2.6 mostrano che (2.8) vale ugualmente. Pertanto le affermazioni (1) e (3) del Teorema seguono immediatamente dal Lemma 2.8.

Consideriamo ora l'asserto (2). Per il Teorema 2.5 esiste $M > 0$ tale che

$$
\begin{aligned}
|u(z) - u(w)| \leq \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \left|\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - \Gamma(\zeta^{-1} \circ w)\right| |Lu(\zeta)|\, d\zeta \leq \\
\int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| \geq M \|z^{-1} \circ w\|} \frac{c \|z^{-1} \circ w\|}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+1}} |Lu(\zeta)|\, d\zeta + \\
\int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| < M \|z^{-1} \circ w\|} \frac{c}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+1}} |Lu(\zeta)|\, d\zeta + \\
\int_{\|\zeta^{-1} \circ z\| < M \|z^{-1} \circ w\|} \frac{c}{\|\zeta^{-1} \circ w\|^{Q+1}} |Lu(\zeta)|\, d\zeta.
\end{aligned}
$$

Se ora applichiamo il Lemma 2.9 nell'ultima espressione, scegliendo $\alpha = 1$ e $\sigma = \frac{M}{c_1}$ nel primo integrale, $\beta = 2$ e $\sigma = M c_1$ nel secondo, $\beta = 2$ e $\sigma = c_2(1+M)$ nell'ultimo, resta dimostrato il punto (2).

La prova di (4) si ottiene come quella di (2) scegliendo $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

3 Integrali singolari negli spazi di Morrey

In questo paragrafo definiamo gli spazi BMO_L e VMO_L, e proviamo il principale risultato riguardo agli integrali singolari ed ai commutatori negli spazi di Morrey.

Per ogni $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ poniamo

$$
⨍_B u = \frac{1}{\mathrm{mis}(\mathcal{B})} \int_B u; \qquad u_B = ⨍_B u.
$$

Possiamo ora definire gli spazi di funzioni BMO_L e VMO_L naturalmente associati alle strutture di gruppo della Definizione 1.1.

DEFINIZIONE 3.1 *Per ogni funzione $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$ poniamo*

$$
\|u\|_* = \sup_{\mathcal{B}} ⨍_B |u(z) - u_B| dz; \qquad \eta_u(r) = \sup_{\varrho \leq r} ⨍_{\mathcal{B}_\varrho} |u(z) - u_{B_\varrho}| dz.
$$

Definiamo quindi

$$
\begin{aligned}
\mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) &= \left\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}) : \|u\|_* < +\infty \right\}, \\
\mathrm{VMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) &= \left\{ u \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1}) : \lim_{r \to 0} \eta_u(r) = 0 \right\}.
\end{aligned}
$$

Per gli spazi BMO_L vale un teorema di tipo John-Nirenberg (cfr. [2]).

PROPOSIZIONE 3.2 *Per ogni $p \in]1,\infty[$ esiste una costante positiva c_p tale che*

$$\left(\fint_{\mathcal{B}} |u(z)-u_{\mathcal{B}}|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_p \|u\|_*,$$

per ogni $u \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1})$.

Il risultato principale del presente paragrafo è costituito dal seguente Teorema, che estende agli spazi di Morrey il Teorema 3.1 di [1].

TEOREMA 3.3 *Siano $p \in]1,\infty[$, $\lambda \in]0, Q+2[$ due costanti fissate, $a \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1})$. Poniamo per ogni $g \in L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})$ e per $i,j = 1,\dots,m_0$,*

$$T_{ij}g(z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\geq\varepsilon} \Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z) g(\zeta)\, d\zeta,$$

$$C_{ij}[a,g](z) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\geq\varepsilon} \Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)[a(z)-a(\zeta)] g(\zeta)\, d\zeta.$$

Allora $T_{ij}g, C_{ij}[a,g] \in L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})$ ed esiste una costante positiva c che dipende da p, da λ e dall'operatore, tale che

$$\|T_{ij}g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \leq c\|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})}; \quad \|C_{ij}[a,g]\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \leq c\|a\|_*\|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})}.$$

DIMOSTRAZIONE Siano $\bar z \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $R>0$ fissati. Indichiamo con $g_0, g_1, \dots, g_k, \dots$ le stesse funzioni definite in (2.5) e poniamo $\delta = 1/(2c_1^2c_2)$. Dal Teorema 3.1 di [1] si ottiene immediatamente

$$\|T_{i,j}g_0\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar z))} \leq \|T_{i,j}g_0\|_{L^p(\mathbb{R}^{N+1})} \leq c\|g\|_{L^p(\mathcal{B}_R(\bar z))} \leq cR^{\frac{\lambda}{p}}\|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})}. \quad (3.1)$$

Consideriamo ora $g_k(z)$, con $k \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathcal{B}_{\delta R}(\bar z)$. Osserviamo preliminarmente che esiste $\widetilde c > 0$ tale che

$$|\Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)| \leq \widetilde c\, \|\zeta^{-1}\circ z\|^{-(Q+2)} \quad (3.2)$$

(cfr. [14], Corollario 2.2). Inoltre, come già visto in (2.7), $\|\zeta^{-1}\circ z\| \geq \frac{1}{4c_1c_2}2^kR$ per ogni $\zeta \in \mathcal{B}_{2^kR}(\bar z)\backslash\mathcal{B}_{2^{k-1}R}(\bar z)$, quindi

$$\begin{aligned} |T_{i,j}g_k(z)| &\leq \int_{\left\{2^{k-1}R\leq\|\bar z^{-1}\circ\zeta\|\leq 2^kR\right\}} \frac{\widetilde c}{\|\zeta^{-1}\circ z\|^{Q+2}}|g(\zeta)|d\zeta \leq \\ &\frac{\widetilde c(4c_1c_2)^{Q+2}}{(2^kR)^{Q+2}} \int_{\mathcal{B}_{2^kR}(\bar z)} |g(\zeta)|d\zeta \leq c'\|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})}(2^kR)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

da cui segue, integrando,

$$\|T_{i,j}g_k\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq c'' R^{\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} (2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}},$$

con c'' costante positiva che dipende solo da p, dalla dimensione dello spazio N e dalle costanti c_1 e c_2. Da questa disuguaglianza e dalla (3.1) si ottiene

$$\frac{1}{(\delta R)^{\frac{\lambda}{p}}} \|T_{i,j}g\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq \delta^{-\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \left(c + c'' \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}} \right)^k \right),$$

da cui segue immediatamente la prova del primo asserto, essendo la serie al secondo membro convergente.

Consideriamo ora il commutatore: come prima, dal Teorema 3.1 di [1] si ottiene

$$\|C_{i,j}[a, g_0]\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq c R^{\frac{\lambda}{p}} \|a\|_* \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})}. \tag{3.4}$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha poi, per le (3.2), (2.7) e la disuguaglianza di Minkowski

$$\|C_{i,j}[a, g_k]\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq$$

$$\left(\int_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} \left| \int_{\left\{ 2^{k-1}R \leq \|\bar{z}^{-1} \circ \zeta\| \leq 2^k R \right\}} \frac{\widetilde{c}}{\|\zeta^{-1} \circ z\|^{Q+2}} |a(z) - a(\zeta)| |g(\zeta)| d\zeta \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\frac{\widetilde{c}(4c_1c_2)^{Q+2}}{(2^k R)^{Q+2}} \left(\int_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} \left| \int_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |a(z) - a(\zeta)| |g(\zeta)| d\zeta \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\frac{\widetilde{c}(4c_1c_2)^{Q+2}}{(2^k R)^{Q+2}} \int_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |g(\zeta)| \left(\int_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} |a(z) - a(\zeta)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Per la Proposizione 3.2 risulta

$$\left(\fint_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} |a(z) - a(\zeta)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\fint_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} |a(z) - a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})}|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$\left(\fint_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} |a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} - a(\zeta)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_p \|a\|_* + |a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} - a(\zeta)|,$$

e, di conseguenza,

$$\|C_{i,j}[a, g_k]\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq$$

$$\frac{\widetilde{c} R^{\frac{Q+2}{p}}}{(2^k R)^{Q+2}} \left(\|a\|_* \int_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |g(\zeta)| d\zeta + \int_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |g(\zeta)| \, |a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})} - a(\zeta)| d\zeta \right) \leq$$

$$\widetilde{c}' R^{\frac{\lambda}{p}} \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \left(\|a\|_* + \left(\fint_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |a(\zeta) - a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})}|^{p'} d\zeta \right)^{\frac{1}{p'}} \right) (2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}}, \tag{3.5}$$

dove $p' = \frac{p}{p-1}$. Utilizzando ancora la Proposizione 3.2 si ottiene

$$\left(\fint_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} |a(\zeta) - a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})}|^{p'} d\zeta \right)^{\frac{1}{p'}} \leq c_p \|a\|_* + |a_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} - a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})}|. \tag{3.6}$$

Osserviamo ora che per ogni $M > 0$ esiste una costante positiva $c(M)$ tale che

$$|a_{\mathcal{B}_{M\varrho}} - a_{\mathcal{B}_\varrho}| \leq c(M)\|a\|_*$$

per ogni $\varrho > 0$; di conseguenza si ha

$$|a_{\mathcal{B}_{2^k R}(\bar{z})} - a_{\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z})}| \leq k c_\delta \|a\|_*,$$

dove c_δ dipende solo da δ. Questa disuguaglianza, la (3.5) e la (3.6) forniscono la seguente stima

$$\|C_{i,j}[a, g_k]\|_{L^p(\mathcal{B}_{\delta R}(\bar{z}))} \leq c''' R^{\frac{\lambda}{p}} \|a\|_* \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} k (2^k)^{\frac{\lambda-(Q+2)}{p}},$$

che, insieme alla (3.4), permette di concludere la dimostrazione del Teorema 3.3, procedendo esattamente come nella prova del primo asserto.

Nel seguito faremo uso della seguente versione "locale" del Teorema 3.3, la cui prova è sostanzialmente identica a quella del Teorema 2.11 di [4] e pertanto non viene riportata.

TEOREMA 3.4 *Siano* $p \in]1, \infty[$, $\lambda \in]0, Q+2[$ *due costanti fissate,* $a \in \mathrm{BMO}_L(\mathbb{R}^{N+1})$ *ed* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^{N+1}$. *Poniamo per ogni* $g \in L^{p,\lambda}(L, \Omega)$, $z \in \Omega$ *e per* $i, j = 1, \ldots, m_0$,

$$T_{ij} g(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{\zeta \in \Omega : \|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \varepsilon\}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z) g(\zeta)\, d\zeta,$$

$$C_{ij}[a, g](z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{\zeta \in \Omega : \|\zeta^{-1} \circ z\| \geq \varepsilon\}} \Gamma_{ij}(z; \zeta^{-1} \circ z)[a(z) - a(\zeta)] g(\zeta)\, d\zeta.$$

Allora $T_{ij} g, C_{ij}[a, g] \in L^{p,\lambda}(L, \Omega)$ *ed esiste una costante positiva* c *che dipende da* p, *da* λ *e dall'operatore, tale che*

$$\|T_{ij} g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \leq c \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)}; \quad \|C_{ij}[a, g]\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)} \leq c \|a\|_* \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\Omega)}.$$

Dimostriamo ora un risultato di densità per lo spazio VMO_L che estende un teorema di Sarason e che sembra noto in letteratura (cfr. [1]). Ne riportiamo la prova per comodità del lettore.

LEMMA 3.5 *Sia* $f \in \mathrm{VMO}_L$. *Allora, per ogni* $\delta > 0$ *esiste* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ *tale che* $\|f - g\|_* < \delta$.

Come corollario del Teorema 3.3 e del Lemma 3.5 otteniamo il seguente risultato, che non dimostriamo, in quanto la sua prova segue esattamente le stesse linee di quella del Teorema 2.13 di [4].

TEOREMA 3.6 *Siano assegnate una funzione* $a \in \mathrm{VMO}_L(\mathbb{R}^{N+1})$, *e due costanti reali* p, λ, *tali che* $p \in]1, \infty[$ *e* $\lambda \in]0, Q+2[$. *Allora, per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $r > 0$, *che dipende da* p, *da* λ *e dall'operatore, tale che, se* $g \in L^{p,\lambda}(L, \mathbb{R}^{N+1})$ *e* $g \equiv 0$ *fuori da* $\mathcal{B}_r$ *risulta*

$$\|C_{ij}[a,g]\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \leq \varepsilon \|g\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})},$$

per $i, j = 1, \ldots, m_0$.

Per dimostrare il Lemma 3.5 definiamo, per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r > 0$,

$$\mathcal{Q}_r(z) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N+1} : \left(D\left(\frac{1}{r}\right), \frac{1}{r^2} \right) (z^{-1} \circ \zeta) \in [-1,1[^{N+1} \right\}$$

Notiamo che, per ogni $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1})$, $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r > 0$, si ha

$$\mathcal{B}_r(z) \subset \mathcal{Q}_r(z) \subset \mathcal{B}_{\theta r}(z), \tag{3.7}$$

dove $\theta = \|(1, \ldots, 1)\|$. Di conseguenza, la norma BMO_L (ed il modulo di continuità VMO_L) definita in termini delle palle $\mathcal{B}_r(z)$ è equivalente a quella definita in termini dei cubi $\mathcal{Q}_r(z)$. Infatti

$$\fint_{\mathcal{Q}_r(z)} |f - f_{\mathcal{Q}_r(z)}| \leq \frac{1}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_r(z))} \int_{\mathcal{Q}_r(z)} |f - f_{\mathcal{B}_r(z)}| + |f_{\mathcal{B}_r(z)} - f_{\mathcal{Q}_r(z)}| \leq$$
$$\frac{2}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_r(z))} \int_{\mathcal{Q}_r(z)} |f - f_{\mathcal{B}_r(z)}| \leq 2 \frac{\mathrm{mis}(\mathcal{B}_r(z))}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_r(z))} \fint_{\mathcal{B}_r(z)} |f - f_{\mathcal{B}_r(z)}|,$$

e $\frac{\mathrm{mis}(\mathcal{B}_r(z))}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_r(z))} = \frac{\omega_{N+1}}{2^{N+1}}$. Questo prova che la norma $\|f\|_*$ (definita con i cubi $\mathcal{Q}_r$) è minore di $\frac{\omega_{N+1}}{2^N} \|f\|_*$ (definita in termini delle palle $\mathcal{B}_r$). La disuguaglianza opposta si ottiene sostituendo $\mathcal{Q}_r(z)$ con $\mathcal{B}_{\theta r}(z)$ e $\mathcal{B}_r(z)$ con $\mathcal{Q}_r(z)$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.5 Per ogni $r > 0$ consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F}_r = \left\{ \mathcal{Q}_r(z) : \left(D(r), r^2\right) z \in 2\mathbb{Z}^{N+1} \right\}.$$

Osserviamo che $\mathcal{F}_r$ è una partizione di $\mathbb{R}^{N+1}$, come si può constatare con una verifica diretta; risulta così ben definita la funzione $h_r(w) = f_{\mathcal{Q}_r(z)}$, dove $\mathcal{Q}_r(z)$ è l'unico cubo di $\mathcal{F}_r$ che contiene w.

Il nostro primo obbiettivo è una stima dell'*oscillazione* di h_r in una palla $\mathcal{B}_{\theta r}(\zeta)$. Osserviamo che esiste una costante $M > 1$, che dipende solo dalla matrice B e dalle costanti c_1, c_2, θ che compaiono in (1.2), (1.3), (3.7), tale che

$$\zeta \in \mathcal{Q}_r(z),\ \zeta' \in \mathcal{Q}_r(w),\ \|\zeta^{-1} \circ \zeta'\| \leq \theta r \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}_r(w) \subset \mathcal{Q}_{Mr}(z). \tag{3.8}$$

Per ogni $\zeta' \in \mathcal{B}_{\theta r}(\zeta)$, siano $\mathcal{Q}_r(z), \mathcal{Q}_r(w)$ i cubi di $\mathcal{F}_r$ tali che $\zeta \in \mathcal{Q}_r(z)$ e $\zeta' \in \mathcal{Q}_r(w)$. Dalla (3.8) si deduce allora

$$|h_r(\zeta) - h_r(\zeta')| \le |f_{\mathcal{Q}_r(z)} - f_{\mathcal{Q}_{Mr}(z)}| + |f_{\mathcal{Q}_{Mr}(z)} - f_{\mathcal{Q}_r(w)}| \le 2M^{Q+2} \fint_{\mathcal{Q}_{Mr}(z)} |f - f_{\mathcal{Q}_{Mr}(z)}|.$$

Pertanto, ricordando che η_f indica il modulo VMO_L di f, si ottiene

$$\mathrm{osc}_{\mathcal{Q}_r(\zeta)} h_r \le 4M^{Q+2} \eta_f(Mr). \tag{3.9}$$

Vogliamo ora provare che $h_r \in \mathrm{BMO}_L$. Sia $\mathcal{Q}_\varrho$ un arbitrario cubo di $\mathbb{R}^{N+1}$. Se $\varrho \le r$, allora

$$\fint_{\mathcal{Q}_\varrho} |f - h_r - (f - h_r)_{\mathcal{Q}_\varrho}| \le \fint_{\mathcal{Q}_\varrho} |f - f_{\mathcal{Q}_\varrho}| + \mathrm{osc}_{\mathcal{Q}_\varrho} h_r \le \left(1 + 4M^{Q+2}\right) \eta_f(Mr),$$

se invece $\varrho > r$, consideriamo l'insieme

$$\mathcal{F}_r(\mathcal{Q}_\varrho) = \{\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_r : \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_\varrho \neq \emptyset\}.$$

Allora

$$\fint_{\mathcal{Q}_\varrho} |f - h_r - (f - h_r)_{\mathcal{Q}_\varrho}| \le 2 \fint_{\mathcal{Q}_\varrho} |f - h_r| \le \frac{2}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_\varrho)} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_r(\mathcal{Q}_\varrho)} \int_{\mathcal{Q}} |f - f_{\mathcal{Q}}| \le$$

$$2 \frac{\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_r(\mathcal{Q}_\varrho)} \mathrm{mis}(\mathcal{Q})}{\mathrm{mis}(\mathcal{Q}_\varrho)} \eta_f(r).$$

Poiché per ogni $\mathcal{Q}_r(z) \in \mathcal{F}_r(\mathcal{Q}_\varrho)$, $\mathcal{Q}_r(z) \subset \mathcal{Q}_\varrho(z)$, a causa della (3.8) (con $\zeta = \zeta' \in \mathcal{Q}_\varrho \cap \mathcal{Q}_r(z)$) si ha che $\mathcal{Q}_r(z)$ è contenuto in $\mathcal{Q}_{M\varrho}$. Inoltre i cubi di $\mathcal{F}_r$ sono disgiunti, quindi $\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{F}_r(\mathcal{Q}_\varrho)} \mathrm{mis}(\mathcal{Q}) \le M^{Q+2} \mathrm{mis}(\mathcal{Q}_\varrho)$. In entrambi i casi troviamo che

$$\|f - h_r\|_* \le \widetilde{M} \eta_f(Mr),$$

dove $\widetilde{M}$ dipende solo da M e da Q. Dunque $h_r \in \mathrm{BMO}_L$.

Sia ora $r > 0$ tale che

$$\|f - h_r\|_* \le \frac{\delta}{2} \tag{3.10}$$

e sia $(h_r)_\varepsilon$ il *mollificato* di h_r definito in (2.4). Evidentemente $(h_r)_\varepsilon$ appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ e, se ε è sufficientemente piccolo, il supporto della funzione $\varphi(D(\varepsilon^{-1})(z \circ (\cdot)^{-1}))$ è contenuto in $\mathcal{B}_r(z)$. Di conseguenza $|(h_r)_\varepsilon(z) - h_r(z)| \le \widetilde{M} \eta_f(Mr)$ per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ e quindi

$$\|(h_r)_\varepsilon - h_r\|_* \le \frac{\delta}{2}.$$

Questo mostra che la funzione $g = (h_r)_\varepsilon$ appartiene allo spazio BMO_L e, insieme alla (3.10), completa la prova del Lemma 3.5.

4 Dimostrazione dei Teoremi 1.5 ed 1.6

Richiamiamo una formula di rappresentazione integrale per le derivate seconde di funzioni regolari dimostrato in [1], Teorema 2.4.

TEOREMA 4.1 *Se* $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1}), i,j = 1,\dots,m_0$, *allora*

$$\partial_{x_i,x_j} v(z) = -Lv(z) \int_{\|\zeta\|=1} \Gamma_j(z;\zeta)\nu_i(\zeta)\, d\sigma - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\|\zeta^{-1}\circ z\|\geq\varepsilon} \Gamma_{ij}(z;\zeta^{-1}\circ z)\left[\sum_{h,k=1}^{m_0} \left(a_{h,k}(z) - a_{h,k}(\zeta)\right)\partial_{x_h,x_k} v(\zeta) + Lv(\zeta)\right] d\zeta \tag{4.1}$$

dove ν_i *è l'*i*−esima componente della normale esterna alla superficie* $\{\|\zeta\| = 1\}$.

In questo paragrafo faremo uso delle seguenti notazioni semplificate:

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sum_{j=1}^{m_0} \|\partial_{x_j} u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)},$$

$$\left\|D^2 u\right\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sum_{j,k=1}^{m_0} \|\partial_{x_j,x_k} u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Iniziamo con una versione locale del Teorema 1.5.

TEOREMA 4.2 *Siano* $u \in C_0^\infty(\mathcal{B}_r(w)), p > 1$ *e* $\lambda \in [0, Q+2[$. *Esistono due costanti positive* c *ed* r_0, *che dipendono solo da* p, λ *e dall'operatore, tali che, se* $r \in]0, r_0]$, *risulta*

$$\|u\|_{S^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))} \leq c\,\|Lu\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}.$$

DIMOSTRAZIONE La stima di $\|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}$, è una diretta conseguenza dei Teoremi 4.1, 3.4 e 3.6. La stima di $\|Yu\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}$ segue subito da quest'ultima, dal momento che risulta

$$Yu = Lu - \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}\partial_{x_i,x_j} u;$$

per le altre derivate è sufficiente utilizzare il Teorema 2.1.

Dimostriamo ora un risultato di interpolazione.

LEMMA 4.3 *Sia* $u \in S^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, *con* $p \in]1,\infty[$ *e* $\lambda \in [0, Q+2[$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante positiva* C_ε, *che dipende solo da* p *e da* λ, *tale che*

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} \leq \varepsilon \left\|D^2 u\right\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})} + C_\varepsilon \|u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathbb{R}^{N+1})},$$

per $j = 1,\dots,m_0$.

DIMOSTRAZIONE Osserviamo innanzitutto che se $\widetilde{u} \in W^{2,p}(\mathbb{R}^{m_0})$ (lo spazio di Sobolev ordinario), allora

$$\|D\widetilde{u}\|_{L^p(\widetilde{\mathcal{B}}_\varrho(\widetilde{x}))} \leq \varepsilon \left\|D^2\widetilde{u}\right\|_{L^p(\widetilde{\mathcal{B}}_\varrho(\widetilde{x}))} + C_\varepsilon \|\widetilde{u}\|_{L^p(\widetilde{\mathcal{B}}_\varrho(\widetilde{x}))}, \tag{4.2}$$

per ogni $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^{m_0}$ (qui $\widetilde{\mathcal{B}}_\varrho(\widetilde{x})$ la palla euclidea di centro $\widetilde{x}$ e raggio ϱ, si veda ad esempio il Teorema 7.28 di [8]), per una opportuna costante C_ε che dipende da ε ed m_0, ma non da ϱ, come si vede con un semplice ragionamento di omogeneità.

Consideriamo ora una funzione $u \in S^{p,\lambda}(L, \mathbb{R}^{N+1})$ e siano $w \in \mathbb{R}^{N+1}, r > 0$ fissati. Evidentemente $u \in S^p(L, \mathbb{R}^{N+1})$, per quasi ogni $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^{N+1-m_0}$ la funzione $\widetilde{u} = u(\cdot, \widetilde{y})$ appartiene $W^{2,p}(\mathbb{R}^{m_0})$ e l'insieme $\{z \in \mathbb{R}^{m_0} : (z, \widetilde{y}) \in \mathcal{B}_r(w)\}$ è una palla *euclidea* di $\mathbb{R}^{m_0}$. Integrando in $\widetilde{y}$, dalla (4.2) si ottiene pertanto

$$\|Du\|_{L^p(\mathcal{B}_r(w))} \leq \varepsilon \left\|D^2u\right\|_{L^p(\mathcal{B}_r(w))} + C_\varepsilon \|u\|_{L^p(\mathcal{B}_r(w))}$$

e con questo si conclude la prova del Lemma 4.3.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.5 Ci limitiamo a considerare il caso in cui Ω è una sfera $\mathcal{B}_r(w)$ ed $\Omega' = \mathcal{B}_{r/2}(w)$, con $r \in]0, r_0]$, ed r_0 è la stessa costante che compare nell'enunciato del Teorema 4.2. Il risultato generale segue da questo e da un elementare ragionamento di compattezza.

Proviamo dapprima la disuguaglianza (1.4) dell'asserto, supponendo di sapere che $u \in S^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(L, \Omega)$, questa ulteriore ipotesi verrà rimossa nel seguito. Introduciamo alcune notazioni e procediamo come nella prova del Teorema 9.11 in [8]. Per ogni $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1[$, poniamo $\sigma' = \frac{1+\sigma}{2}$ e scegliamo una funzione $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\varphi(t) = 1 \text{ per } 0 \leq t \leq r\sigma, \qquad \varphi(t) = 0 \text{ per } t \geq r\sigma'$$

e tale che

$$|\varphi'| \leq \frac{k}{r(1-\sigma)}, \qquad |\varphi''| \leq \frac{k}{r^2(1-\sigma)^2},$$

per una opportuna costante positiva k, indipendenta da r e da σ. Poniamo quindi

$$\eta(z) = \varphi\left(\|w^{-1} \circ z\|\right) \tag{4.3}$$

e consideriamo la funzione ηu prolungata col valore 0 fuori da Ω. Applicando il Lemma 4.3, con $\varepsilon = \delta(1-\sigma)r/k$, otteniamo

$$\sup_{\frac{1}{2} \leq \sigma < 1} (1-\sigma) r \|Du\|_{L^{p,\lambda}(L, \mathcal{B}_{r\sigma}(w))} \leq 2\delta \sup_{\frac{1}{2} \leq \sigma < 1} (1-\sigma)^2 r^2 \|D^2u\|_{L^{p,\lambda}(L, \mathcal{B}_{r\sigma}(w))} +$$

$$C'_\delta \|u\|_{L^{p,\lambda}(L, \mathcal{B}_r(w))}$$

per ogni $\delta \in]0, 1/2]$, dove la costante C'_δ dipende solo da r e da k. D'altra parte, poiché $\eta u \in S^p(L, \mathbb{R}^{N+1})$, il Teorema 4.2 e l'Osservazione 2.7 forniscono la seguente stima

$$(1-\sigma)^2 r^2 \|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_{r\sigma}(w))} \leq c\Big((1-\sigma)^2 r^2 \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))} + k(1-\sigma) r \|Du\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_{r\sigma'}(w))} + k\|u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}\Big).$$

Dalle ultime due disuguaglianze otteniamo

$$(1-\sigma)^2 r^2 \|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_{r\sigma}(w))} \leq 2k\delta \sup_{\frac{1}{2}\leq\sigma'<1} (1-\sigma')^2 r^2 \|D^2 u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_{r\sigma'}(w))} + C''_\delta \left(\|u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))} + \|Lu\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}\right),$$

dove C''_δ è una costante che dipende solo da δ, k, r e dall'operatore. Da questa disequazione si ottiene immediatamente la prima delle stime (1.4) (con $\|u\|_{L^{p,\lambda}(L,\mathcal{B}_r(w))}$ invece di $\|u\|_{L^p(\mathcal{B}_r(w))}$). La seconda segue direttamente, dal momento che $Yu = Lu - \sum_{i,j=1}^{m_0} a_{i,j}\partial_{x_i x_j} u$.

Eliminiamo ora l'ipotesi aggiuntiva $u \in S^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(L,\Omega)$, per mezzo delle stesse tecniche introdotte nella prova del Teorema 4.2 di [4]. Il primo passo è la prova che $u \in S^p_{\mathrm{loc}}(L,\Omega)$.

Indichiamo $v = \eta u, v_{x_j x_k} = \partial_{x_j x_k} v$, per $j,k = 1,\dots,m_0$. Osserviamo che, essendo u una soluzione forte di $Lu = f$, allora $v \in S^q(L, \mathbb{R}^{N+1})$, per un certo $q > 1$ quindi, per il Teorema 4.1 (e per l'Osservazione 2.7),

$$v_{x_i x_j}(z) = -\sum_{h,k=1}^{m_0} C_{i,j}\big[a_{h,k} v_{x_h x_k}\big](z) - h_{i,j}(z), \tag{4.4}$$

per $i,j = 1,\dots,m_0$, dove

$$h_{i,j}(z) = T_{i,j} Lv(z) + c_{i,j}(z) Lv(z),$$

e $c_{i,j}$ sono funzioni limitate.

Poiché $S^{q,0}(L,\mathbb{R}^{N+1}) = S^q(L,\mathbb{R}^{N+1})$, dal Teorema 2.1 otteniamo che $Lv \in L^{q'}(\mathbb{R}^{N+1})$, dove abbiamo posto $q' = \min\left\{\frac{q(Q+2)}{Q+2-q}, p\right\}$ e quindi, per il Teorema 3.1 di [1], anche $h_{i,j} \in L^{q'}(\mathbb{R}^{N+1})$. Definiamo per ogni funzione $w \in \left[L^{p,\lambda'}(L,\mathcal{B}_r)\right]^{m_0 \times m_0}$ e per $i,j = 1,\dots,m_0$

$$(\widetilde{T}w)_{i,j}(z) = -\sum_{h,k=1}^{m_0} C_{i,j}\big[a_{h,k} w_{h,k}\big](z) - h_{i,j}(z).$$

Scegliendo eventualmente r più piccolo ed utilizzando i Teoremi 3.1 e 3.2 di [1] troviamo che l'operatore $\widetilde{T}$ è una contrazione di $\left[L^{q'}(\mathcal{B}_r)\right]^{m_0 \times m_0}$, e quindi ha un unico punto fisso $\widetilde{w}$.

D'altra parte, a causa della (4.4), $\left(v_{x_i,x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m_0}$ è anche punto fisso di $\widetilde{T}$ in $[L^q(\mathcal{B}_r)]^{m_0\times m_0}$. Per l'unicità del punto fisso la funzione $\left(v_{x_i,x_j}\right)_{i,j=1,\dots,m_0}$ appartiene quindi a $\left[L^{q'}(\mathcal{B}_r)\right]^{m_0\times m_0}$.

Se $q'=p$ otteniamo $u\in S^p_{\mathrm{loc}}(L,\Omega)$, altrimenti dobbiamo ripetere questo ragionamento un numero finito di volte.

Mostriamo ora che $u\in S^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(L,\Omega)$, procedendo come nella prova del Teorema 3.3 di [6]. Per prima cosa applichiamo il Corollario 2.3, con $\mu=0$, ed otteniamo che $Lv\in L^{p,\lambda'}(L,\mathbb{R}^{N+1})$, dove $\lambda'=\min\{\lambda,p\}$. Ragionando come sopra ed applicando i Teoremi 3.4 e 3.6 troviamo che, se r è sufficientemente piccolo, l'operatore $\widetilde{T}$ è una contrazione anche per lo spazio $\left[L^{p,\lambda'}(L,\mathcal{B}_r)\right]^{m_0\times m_0}$.

Se ora $\lambda'=\lambda$ la prova del Teorema è terminata, altrimenti si applica di nuovo il Corollario 2.3 e si conclude ripetendo il ragionamento un numero finito di volte.

Osserviamo che dal Corollario 2.3 e dal Teorema 4.2 segue

$$\|v\|_{L^{p,\mu+p}(L,\mathbb{R}^{N+1})}\le k\|v\|_{S^{p,\mu}(L,\mathbb{R}^{N+1})}\le kc\|v\|_{L^{p,\mu}(L,\mathbb{R}^{N+1})},$$

per ogni $\mu\ge 0$, quindi si dimostra che (1.4) vale effettivamente con la norma $\|u\|_{L^p(\mathcal{B}_r(w))}$, come enunciato nel Teorema 1.5.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.6 Segue immediatamente dai Teoremi 1.5 e 2.1.

Bibliografia

[1] M. BRAMANTI, M. C. CERUTTI, M. MANFREDINI, *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **200** (1996), 332–354.

[2] N. BURGER, *Espaces des fonctions à variation moyenne bornée sur un espace de nature homogène*, C. R. Acad. Sc. Paris **286** (1978), 139–142.

[3] S. CAMPANATO, *Proprietà di inclusione per spazi di Morrey*, Ric. Mat. **12** (1963), 67–86.

[4] F. CHIARENZA, M. FRASCA, P. LONGO, *Interior $W^{2,p}$ estimates for non divergence elliptic equations with discontinuous coefficients*, Ric. Mat. **40** (1991), 149–168.

[5] G. DI FAZIO, M. A. RAGUSA, *Commutators and Morrey spaces*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) **5-A** (1991), 323–332.

[6] ———, *Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients*, J. Funct. Anal. **112,2** (1993), 241–256.

[7] G. B. FOLLAND, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups,* Arkiv for Math. **13** (1975), 161–207.

[8] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order,* 2nd ed. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[9] D. JERISON, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition,* Duke Math. J. **53** (1986), 503–523.

[10] E. LANCONELLI, S. POLIDORO, *On a class of hypoelliptic evolution operators,* Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **52,1** (1994), 29–63.

[11] G. LU, *Embedding theorems on Campanato-Morrey spaces for vector fields and applications,* C. R. Acad. Sc. Paris **320** (1995), 429–434.

[12] M. MANFREDINI, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations,* (in corso di stampa su Differential Integral Equations)

[13] M. MANFREDINI, S. POLIDORO, *Interior regularity for weak solutions of ultraparabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients,* (in corso di stampa su Boll. Un. Mat. Ital.).

[14] S. POLIDORO, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type,* Le Matematiche **49** (1994), 53–105.

[15] ———, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations,* Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997), 321–340.

[16] ———, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov-Fokker-Planck equations,* Rendiconti di Matematica, VII, **15** (1995), 535–560.

[17] D. SARASON, *On functions of vanishing mean oscillation,* Trans. Amer. Math. Soc. **207** (1975), 391–405.

[18] G. STAMPACCHIA, *The spaces $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **19** (1965), 443–462.

[19] E. M. STEIN, *Harmonic Analysis: Real variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.